

# ЗАДАЧА О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

П.Г.Данилаев

Казанский государственный технический университет им. А.Н.Туполева  
420111, Казань, ул. К.Маркса, 10  
root@kaiadm.kazan.ru

В середине 70-х годов Г.Г.Тумашев поддержал идею использовать задачу о продолжении решения уравнения параболического типа [1] для исследования прикладных проблем. Настоящая работа посвящена развитию и численному исследованию этой задачи, а также различным ее приложениям. Рассмотрены задача определения пластового давления в неклассической постановке, задачи идентификации параметров неоднородных пористых сред в постановках, основанных на теоремах единственности (коэффициентные обратные задачи), задача теплотехники о расчете температуры в стенке трубы в неклассической постановке и задачи экологии по математическому моделированию загрязнения окружающей среды. Приводятся результаты решения примеров. Развиваются идеи монографий [2], [3].

Задача о продолжении решения уравнения параболического типа формулируется [1] как задача определения функции  $u(x, y, t)$  из условий

$$Pu = 0, \quad P = \frac{\partial}{\partial t} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad a_{ij} \in C^3(\overline{\Omega}),$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0,$$

$$u|_{\Sigma_0} = g_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \right|_{\Sigma_0} = g_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\nu, x_i),$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ или отсутствует.}$$

Здесь  $\Omega$  — область в пространстве  $R^n$  с границей  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ,  $Q = \Omega \times (0; T)$ ,  $\Sigma_i = \Gamma_i \times (0; T)$ ,  $i = 0; 1$ ; (см. рис. 1).

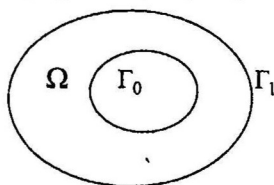


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда решение параболического уравнения ищется в круговой области, образованной концентрическими окружностями. На одной

из них краевые условия переопределены, на другой они отсутствуют. Начальное условие не задается. Ищется решение  $u(r, t)$  задачи

$$k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = a \frac{\partial u}{\partial t}, \quad r_0 < r < R, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(r_0, t) = \varphi(t), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(r_0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$\varphi(t)$ ,  $g(t)$  – заданные функции. Переход к новым безразмерным независимым переменным  $(y, z)$ , таким, что

$$r = r_0 \left( \frac{R}{r_0} \right)^y, \quad t = z \left( r_0 \ln \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( \frac{R}{r_0} \right)^{2y} b^{-1}, \quad b = k/a,$$

позволяет свести решение задачи (1) – (2) к исследованию задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad 0 < y < 1, \quad z > 0; \quad (3)$$

$$u(0, z) = \varphi \left( z \left( r_0 \ln \frac{R}{r_0} \right)^2 b^{-1} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, z) = r_0 \ln \frac{R}{r_0} g \left( z \left( r_0 \ln \frac{R}{r_0} \right)^2 b^{-1} \right), \\ z \geq 0. \quad (4)$$

Задача о продолжении решения параболического уравнения содержит неклассический набор дополнительных условий. Ее решение ищется в рамках определения корректности по А.Н.Тихонову (условно корректности) методами регуляризации. Одним из них является метод квазиобращения, который и использовался при решении прикладных задач. Решение задачи (3) – (4) сводится к решению задачи квазиобращения, которая в данном случае записывается так:

$$-\varepsilon_1^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ M^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) - \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = 0,$$

$$y \in (0; 1), \quad z \in (0; z_*];$$

$$\tilde{u}(y, 0) - \varepsilon_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(y, 0) - \varepsilon_1^{-1} M^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z}(y, 0) - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(y, 0) \right) = \varphi(0), \quad y \in [0; 1];$$

$$\tilde{u}(0, z) = \varphi \left( z \left( r_0 \ln \frac{R}{r_0} \right)^2 b^{-1} \right), \quad z \in [0, z_*];$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(0, z) = r_0 \ln \frac{R}{r_0} g \left( z \left( r_0 \ln \frac{R}{r_0} \right)^2 b^{-1} \right), \quad z \in [0, z_*];$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(y, z_*) + \varepsilon_1^{-1} M^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(y, z_*) - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(y, z_*) \right) = 0, \quad y \in [0, 1],$$

где  $M = M(y, \varepsilon_0)$ ,  $\rho = \rho(y, \varepsilon_0)$  – функции регуляризации, построенные специальным образом,  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  – параметры регуляризации. Численное решение задачи квазиобращения находилось методом конечных разностей [4]. Использовался метод матричной прогонки с итерациями [5]. Сравнение численного решения задачи (3) – (4) с точным аналитическим решением приводится в [6].

Рассмотрим практические приложения сформулированной задачи. Первое из них относится к подземной гидромеханике [7]. Решается одномерная обратная задача расчета пластового давления при следующей закону Дарси нестационарной фильтрации однофазной сжимаемой жидкости. Рассматривается радиальный осесимметричный случай: фильтрация в круговом пласте к одиночной центральной скважине, которая моделируется как окружность заданного радиуса  $r_0$ . На скважине задаются два краевых условия: давление и объемный дебит. На внешней границе кругового пласта,  $r = R$ , краевые условия отсутствуют. Начальное распределение пластового давления не задается. Предполагается, что гидропроводность  $\sigma$ , толщина пласта  $H$ , упругость  $\beta^*$  – постоянные величины, что не нарушает общности подхода. Фильтрация описывается уравнением

$$\sigma \left( \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \beta^* H \frac{\partial p}{\partial t}, \quad r_0 < r < R, \quad t > 0,$$

с условиями

$$p(r_0, t) = \varphi(t), \quad \frac{\partial p}{\partial r}(r_0, t) = \frac{q(t)}{2\pi r_0 \sigma} = g(t), \quad t \geq 0.$$

Здесь  $\varphi(t)$ ,  $g(t)$  – заданные функции,  $p(r, t)$  – пластовое давление,  $q(t)$  – объемный дебит. Решались модельные задачи. На рис. 2 результат решения одной из них [8] сравнивается с точным решением. Сплошная линия изображает точное решение, пунктирная – приближенное. Согласно расчетам, полученное решение устойчиво по отношению к малым возмущениям в краевых условиях. Обнаружено хорошее совпадение результатов расчета с точным решением на большей части расчетной области.

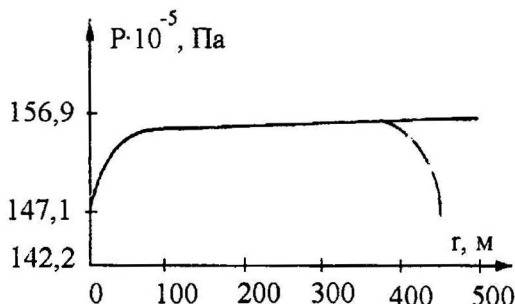


Рис. 2

Другим приложением является задача расчета нестационарного температурного поля стенки цилиндра: радиальный осесимметричный случай. На наружной поверхности цилиндра задаются два краевых условия – температура и ее градиент, на внутренней поверхности краевые условия отсутствуют. Вместе с коэффициентом теплоотдачи они являются искомыми. Начальное распределение температуры не задается. Задача возникает в связи с исследованием элементов энергетических установок [9].

Однородный полый цилиндр с радиусом  $r_0 \leq r \leq r_1$  и длиной, намного превышающей его диаметр, имеет постоянные теплофизические свойства и помещен в вертикальное положение. При подводе тепла (электрический ток) цилиндр прогревается. После прогрева в нем начинается течение сжиженного газа, испаряющегося по мере прогрева и переходящего в газообразное состояние. Ищется распределе-

ние температуры в стенке цилиндра, ее значение и величина температурного градиента на внутренней поверхности. Большая длина и малый диаметр цилиндра, малый температурный градиент по его длине позволяют определять поле температур в сечении цилиндра как решение уравнения

$$a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{q_v}{\rho c_p}, \quad r_0 < r < r_1, \quad t > 0, \quad (5)$$

где  $T(r, t)$  – температура,  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $q_v$  – объемное тепловыделение,  $c_p$  – теплоемкость,  $\rho$  – плотность материала цилиндра. Предполагается, что величина  $b = q_v (\rho c_p)^{-1}$  является постоянной. Уравнение (5) рассматривается совместно с условиями на наружной поверхности цилиндра

$$T_w = T(r_1, t) = \varphi(t), \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_w = \frac{\partial T}{\partial r}(r_1, t) = -\frac{q_n}{\lambda} = g(t), \quad t \geq 0,$$

где  $q_n$  – плотность теплового потока на наружной поверхности,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности. Расчеты проводились для лабораторной установки с заданными характеристиками. Внутри цилиндра сверху вниз течет жидкий азот при температуре 85 К. Метод позволяет "подойти" близко к внутренней поверхности цилиндра, но не дает возможности определить температуру непосредственно на ней. Эта температура находится путем экстраполяции. Характерная кривая распределения температуры в стенке цилиндра на один из моментов времени приведена на рис. 3. На рис. 4 показаны графики изменения температуры во времени на наружной поверхности цилиндра (кривая 2) и на его внутренней поверхности (кривая 1). После нахождения температуры и ее градиента на внутренней поверхности цилиндра они использовались для определения коэффициента теплоотдачи этой поверхности.

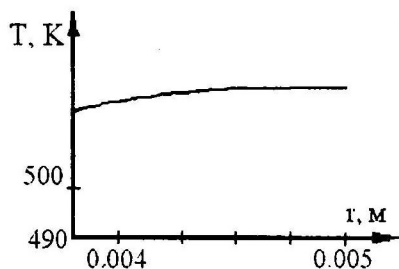


Рис. 3

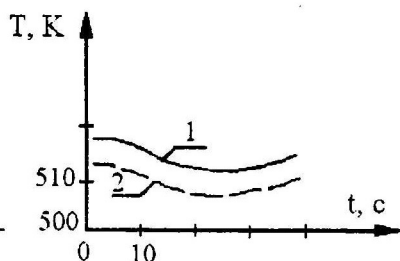


Рис. 4

Следующим классом задач, исследование которого сведено к решению задачи о продолжении решения параболического уравнения, был класс коэффициентных обратных задач [2]. Эти задачи ставились в связи с проблемой определения фильтрационных параметров водонефтяных пластов. Однако проблема рассматривалась шире: разработанный подход позволил решить одновременно несколько математических проблем, таких как определение коэффициента при младшем члене уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x)u, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

определение коэффициента при старшем члене уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (6)$$

определение нескольких неизвестных коэффициентов

$$a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(x, t),$$

(неизвестны коэффициенты  $a(x)$ ,  $b(x)$ ). Коэффициентные обратные задачи являются условно-корректными [11]. Они редуцируются к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода. В основу исследования положены результаты, полученные М.В.Клибановым при доказательстве соответствующих теорем единственности решения [10]. На-

пример, для уравнения (6) формулируется задача: определить вектор-функцию  $\{k(x), u(x, t)\}$ , решая его совместно с условиями

$$u(x_0, t) = g_0(t), \quad u_x(x_0, t) = h_0(t),$$

$$u(x_1, t) = g_1(t), \quad u_x(x_1, t) = h_1(t), \quad -\varepsilon < t < t_1; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

Здесь  $g_0(t)$ ,  $h_0(t)$ ,  $g_1(t)$ ,  $h_1(t)$ ,  $\varphi(x)$  — заданные функции, удовлетворяющие обычным условиям согласования. Из уравнения (6) исключается коэффициент  $k(x)$ . Для этого уравнение разрешается относительно коэффициента  $k(x)$ , а затем и его производной по  $x$ , и далее они исключаются из уравнения путем дифференцирования по переменной  $t$  за счет условий  $k_t = 0$ ,  $k_x = 0$ . Осуществляется переход к новой неизвестной функции  $v(x, t) = u_t/u$ . Для нее исходная задача редуцируется к интегро-дифференциальному уравнению

$$Av_{xx} + Bv_x = Cv_t, \quad x_0 < x < x_1, \quad -\varepsilon < t \leq t_1, \quad (7)$$

$$v(x_0, t) = \mu_0(t), \quad v_x(x_0, t) = \eta_0(t), \quad -\varepsilon < t \leq t_1;$$

$$v(x_1, t) = \mu_1(t), \quad v_x(x_1, t) = \eta_1(t), \quad -\varepsilon < t \leq t_1;$$

$v(x, 0)$  задается произвольно. Использованы обозначения

$$\mu_0(t) = g_{0t}/g_0, \quad \mu_1(t) = g_{1t}/g_1, \quad \eta_0(t) = (h_{0t}g_0 - h_0g_{0t})/g_0^2,$$

$$\eta_1(t) = (h_{1t}g_1 - h_1g_{1t})/g_1^2, \quad A = EJ_0 + vJ_1,$$

$$B = E(2J_0^2 - J_2) + v(2J_0J_1 - J_3), \quad C = J_1J_2 - J_0J_3;$$

$$E = 1 - \exp\left(\int_0^t v dt\right), \quad J_0 = \int_0^t v_x dt + (\ln \varphi)_x, \quad J_1 = \int_0^t (1 - E)J_0 dt,$$

$$J_4 = \int_0^t v_{xx} dt + \frac{\varphi_{xx}}{\varphi}, \quad J_2 = J_0^2 - (\varphi_x/\varphi)^2 + J_4, \quad J_3 = \int_0^t (1 - E)J_2 dt.$$

Для уравнения (7) формулируется задача о продолжении решения, которая исследуется методом квазиобращения. Задача квазиобращения решается методом конечных разностей. Численное решение ищется методом матричной прогонки [5] и сравнивается с точным аналитиче-

ским решением. На рис. 5 сравнивается вычисленный коэффициент (кривая 2) с его точным значением (кривая 1).

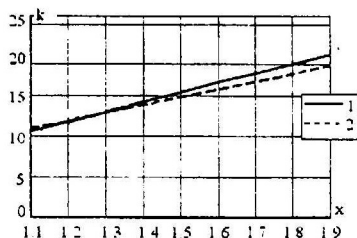


Рис. 5

Приведем некоторые задачи математического моделирования процессов загрязнения воздушной среды автомобильным транспортом и промышленными выбросами. В основе гидродинамических моделей лежит уравнение баланса атмосферных примесей [12]:

$$\frac{dS_a}{dt} = -\frac{\partial (w_a S_a)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial S_a}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_1 \frac{\partial S_a}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial S_a}{\partial z} \right) + \epsilon_a + \phi(x, y, z, t). \quad (8)$$

Здесь  $S_a$  — объемная концентрация примеси  $a$ ;  $x, y, z$  — декартовы координаты;  $u, v, w$  — составляющие скорости вдоль осей  $x, y, z$  соответственно;  $w_a$  — собственная вертикальная скорость примеси;  $k_1$  и  $k$  — коэффициенты турбулентной вязкости, связанные с беспорядочными перемещениями частиц по горизонтали и вертикали соответственно,  $\epsilon_a$  — скорость изменения концентрации примеси за счет различных факторов (стоки и источники примеси). Приведем задачи, сводящиеся к задаче о продолжении решения уравнения (8).

Задача 1. Существует некоторый постоянный очаг выброса загрязнения в атмосферу, например, труба, которая моделируется как окружность конечного радиуса. На этой окружности заданы объемная концентрация примеси и ее нормальная производная. В области, пред-



ставляющей собой концентрическую окружность по отношению к источнику загрязнения, ищется распределение объемной концентрации.

Задача 2. Рассматривается некоторый прямолинейный источник загрязнения (участок шоссе, улица). На нем задаются объемная концентрация примеси и ее нормальная производная. Ищется распределение объемной концентрации в некоторой области, для которой указанный отрезок рассматривается как часть границы. Результаты расчетов подтверждают правомерность данного подхода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Латтес Р., Люнс Ж.-Л. *Метод квазиобращения и его приложения*. – М.: Мир, 1970. – 336 с.

2. Данилаев П.Г. *Коэффициентные обратные задачи для уравнений параболического типа и их приложения*. – Казань: УНИПРЕСС, изд-во Казанск. математ. об-ва, 1998. – 127 с.

3. Голубев Г.В., Данилаев П.Г., Тумашев Г.Г. *Определение гидропроводности неоднородных нефтяных пластов нелокальными методами*. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. – 167 с.

4. Данилаев П.Г. *Идентификация процессов переноса в неоднородных пористых средах*: Автореф. дис. ... доктора физ.-мат. наук: 05.13.16. – Казань, 2000. – 24 с.

5. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. – М.: Наука, 1978. – 590 с.

6. Данилаев П.Г. *Численное решение одномерного уравнения параболического типа с нестандартными начально-краевыми условиями // Моделирование в механике*. – Новосибирск, 1989. – Т.3 (20). – № 1. – С. 61–68.

7. Данилаев П.Г. *Численное решение внутренней обратной задачи для уравнения параболического типа и ее приложения // Моделирование в механике*. – Новосибирск, 1993. – Т. 7 (24). – № 3. – С. 45–50.

8. Данилаев П.Г. *Численное решение задачи определения пластового давления в неклассической постановке // Математическое модели-*

рование процессов фильтрации и оптимизации нефтедобычи. – Казань, 1988. – С.29–33.

9. Данилаев П.Г., Гортышов Ю.Ф., Кузьмин А.П. *Численное решение неклассической задачи расчета одномерного нестационарного температурного поля* // Теплообмен и трение в двигателях и энергетических установках летательных аппаратов. – Казань, 1988. – С. 12–16.

10. Клибанов М.В., Данилаев П.Г. *О решении коэффициентных обратных задач методом квазиобращения* // Докл. АН СССР, 1990. – Т. 310. – № 3. – С. 528–532.

11. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа*. – М.: Наука, 1980. – 286 с.

12. Марчук Г.И. *Математическое моделирование в проблеме окружающей среды*. – М.: Наука, 1982. – 319 с.